Über transfinite Funktionen. III

Von G. FODOR in Szeged

Sei S eine zusammengehörige Teilmenge von $W(\omega_\alpha)=\{\beta;\beta<\omega_\alpha\}$ und $cf(\alpha)>0$ (d. h. ω_α sei nicht mit ω konfinal). In S seien zwei Funktionen $f(x)$ und $\delta(x)$ mit Werten aus S bzw. $W(\omega_\alpha)$ definiert, so daß $\delta(S)$ eine zusammengehörige Teilmenge von $W(\omega_\alpha)$ mit $0\in\delta(S)$ ist. Seien A, B, C und D, E die folgenden Bedingungen:

A: $\delta(x)$ ist bestimmt divergent,

B: Für alle $x\in S$ mit $\delta(x)>0$, gilt $\delta(f(x))<\delta(x)$,

C: $f(x)$ ist bestimmt divergent,

D: Für alle $\gamma\in\delta(S)$, die Mächtigkeit der Menge $\{x\in S:\delta(x)=\gamma\}$ ist kleiner als $\aleph_{cf(\alpha)}$,

E: Für alle $x\in S$, die Mächtigkeit der Menge $\{y\in S:f(y)=x\}$ ist kleiner als $\aleph_{cf(\alpha)}$.

In [1] wurde der folgende Satz bewiesen:

1. *Wenn $cf(\alpha)>0$ gilt, so folgt aus jeder zwei der Bedingungen* A, B *und* C (*oder* D, B *und* E), *die Negation der dritten.*

Sei nun M eine zusammengehörige Teilmenge von S und sei ferner in M eine Funktion $f(x)$ mit $f(M)\subseteq S$ und in S eine Funktion $\delta(x)$ mit $\delta(S)\subseteq W(\omega_\alpha)$ definiert, so daß für alle $x\in M$, $\delta(f(x))<\delta(x)$ mit $\delta(x)>0$ gilt. Wir nehmen an, daß $\delta(M)$ eine stationäre Teilmenge von $W(\omega_\alpha)$ ist; dann gilt der folgende Satz ([2]).

2. *Wenn ω_α $(\alpha>0)$ regulär ist, so folgt aus jeder zwei der Bedingungen* A, B *(für $x\in M$) und* C [*oder* D, B *(für $x\in M$) und* E], *die Negation der dritten.*

Ist ω_α singulär, so gilt dieser Satz in allgemeinen nicht mehr.

Wir betrachten nun die folgenden Bedingungen:

A′: $\delta(x)$ ist fast-monoton,

B′$\equiv$B (für $x\in M$ statt $x\in S$),

C′: $f(x)$ ist fast-monoton.

Dann gilt der folgende Satz:

I. *Wenn* $cf(\alpha)>0$ *ist, so folgt aus jeder zwei der Bedingungen* A′, B′ *und* C′ *die Negation der dritten.*

Wir werden noch den folgenden Satz beweisen:

II. *Wenn*

1. $cf(\alpha)>0$,
2. $\delta(M)$ *eine stationäre Teilmenge von* $W(\omega_\alpha)$ *ist und*
3. $f(x)$ *und* $\delta(x)$ *fast-monoton sind,*

so gibt es eine Teilmenge E *von* M, *so daß*

4. $\delta(E)$ *eine stationäre Teilmenge von* $W(\omega_\alpha)$ *ist und*
5. *für alle* $x\in E$, $\delta(f(x))\geqq\delta(x)$ *gilt.*

Bei dem Beweis dieses Satzes wenden wir den folgenden Satz an ([2]):

III. *Wenn* $cf(\alpha)>0$ *und* B′ *gültig sind und* $\delta(M)$ *eine stationäre Teilmenge von* $W(\omega_\alpha)$ *ist, so existiert eine Teilmenge* E *von* M, *so daß*

a) $\delta(E)$ *eine stationäre Teilmenge von* $\delta(M)$ *ist und*

b) $\delta(f(E))<\delta(E)$ *gilt.*

Wir brauchen folgende Definitionen und Bezeichnungen (vgl. z. B. [3]). Ist Λ eine Ordnungszahl, so bedeute $W(\Lambda)$ die Menge aller Zahlen ξ, für die $\xi<\Lambda$ ist. Sind M und N zwei Teilmengen von $W(\omega_\alpha)$ ohne Maximum, so heißen M und N zusammengehörig, wenn es zu jeder Ordnungszahl jeder der beiden Mengen eine größere Ordnungszahl in der anderen Menge gibt. Sind μ und ν zwei Limeszahlen, so heißt μ konfinal mit ν, wenn μ der Limes einer wachsenden Folge vom Typ ν ist. Ist α eine Limeszahl, so bedeute $cf(\alpha)$ den Index γ der kleinsten Ordnungszahl ω_γ, mit der α konfinal ist. Eine Teilmenge M von $W(\Lambda)$ heißt in $W(\Lambda)$ abgeschlossen, wenn sie zu jeder Fundamentalfolge von Zahlen aus ihr auch deren Limes enthält, sofern dieser $<\Lambda$ ist. Eine in $W(\Lambda)$ abgeschlossene, mit $W(\Lambda)$ zusammengehörige Teilmenge M von $W(\Lambda)$ heißt ein Band von $W(\Lambda)$. Eine Teilmenge M von $W(\Lambda)$ heißt stationär, wenn $W(\Lambda)-M$ kein Band von $W(\Lambda)$ enthält. Eine auf einer mit $W(\Lambda)$ zusammengehörigen Teilmenge M von $W(\Lambda)$ definierte Funktion $\varphi(\xi)$ mit Werten aus $W(\Lambda)$ heißt bestimmt divergent, wenn es zu jedem $\alpha<\Lambda$ eine β gibt, so daß $\varphi(\xi)>\beta$ für $\xi\geqq\alpha$ gilt. Eine auf einer mit $W(\Lambda)$ zusammengehörige Teilmenge M von $W(\Lambda)$ definierte Funktion $\psi(\xi)$ mit Werten aus $W(\Lambda)$ heißt fast-monoton, wenn sie bestimmt divergent und für jedem $\beta<\Lambda$, $\psi(W(\beta)\cap M)$ beschränkt ist.

Beweis des Satzes I. Es sei $\{\delta(f(x))\}_{x\in M}\cap(\delta(S)-\delta(M))=D$. Betrachten wir für jedes $x\in M$ die Folge

$$(1)\qquad f^0(x)=x,\quad f^1(x)=f(x),\quad f^2(x),\dots,f^n(x),\dots,$$

wo $f^n(x)=f(f^{n-1}(x))$ $(n>0)$ ist, wenn $f^{n-1}(x)\in M$ gilt.

(i) Seien $m<n$ zwei nicht-negative Zahlen, für die $f^n(x)$ und $f^n(x)$ existieren. Wenn eine Zahl l mit $m \leqq l<n$ existiert, für die $\delta(f^l(x)) \neq 0$ ist, so gilt

$$f^n(x) \neq f^m(x).$$

Wäre die Behauptung falsch, so ergäbe sich aus der Bedingung B', daß einerseits

$$\delta(f^m(x)) \geqq \delta(f^{m+1}(x)) \geqq \cdots \geqq \delta(f^l(x)) > \delta(f^{l+1}(x)) \geqq \cdots \geqq \delta(f^n(x)),$$

andererseits

$$\delta(f^n(x)) = \delta(f^m(x))$$

gilt, was unmöglich ist.

Daraus folgt, daß für jedes $x \in M$ eine nicht-negative Zahl n existiert, so daß $\delta(f^n(x)) \in D \cup \{0\}$ ist. Wäre die Behauptung falsch, dann ergäbe sich aus B' und (i), daß die Elemente der Folge (1) verschieden sind und

$$\delta(x) > \delta(f(x)) > \delta(f^2(x)) > \cdots > \delta(f^n(x)) > \cdots$$

besteht. Das wäre aber eine Unmöglichkeit, weil jede absteigende Folge von Ordnungszahlen nur endlich viele Glieder enthält. Für jedes $x \in M$ bezeichnen wir mit $n(x)$ die kleinste Zahl l, für die $\delta(f^l(x)) \in D \cup \{0\}$.

Es sei E eine zusammengehörige Teilmenge von Typ $\omega_{cf(\alpha)}$ von M. Jedem Element x von E entspricht also eine nicht-negative ganze Zahl $n(x)$. Es sei n eine solche Zahl und

$$E_n = \{x \in E : \delta(f^n(x)) \in D \cup \{0\}\}.$$

Da $cf(\alpha)>0$ und E eine zusammengehörige Teilmenge vom $\omega_{cf(\alpha)}$ von ist, so existiert ein Index n_0, so daß E_{n_0} eine zusammengehörige Teilmenge von E ist.

Aus A′ und C′ folgt, daß die Mengen $f^n(E_{n_0})(0<n \leqq n_0)$ und $\delta(f^{n_0}(E_{n_0}))$ mit $W(\omega_\alpha)$ zusammengehörig sind.

Nach der Bedingung A′ gibt es zu jedem $\gamma \in W(\omega_\alpha)$ zwei kleinste Zahlen $\varphi(\gamma) = y_\gamma$ und $\psi(\gamma) = z_\gamma$ mit $\varphi(\gamma) > \gamma$ und $\psi(\gamma) > \gamma$, so daß $\delta(\xi) > \delta(\gamma)$, $\delta(\xi) > \gamma$ für $\xi \in S$ mit $\xi > \varphi(\gamma)$ bzw. $\delta(\xi) < \psi(\gamma)$ für $\xi \in S$ mit $\xi < \gamma$ gilt. Nach der Bedingung C′ gibt es zu jedem $\gamma \in W(\omega_\alpha)$ zwei kleinste Zahlen $\tau(\gamma) = u_\gamma$ und $\varrho(\gamma) = v_\gamma \in W(\omega_\alpha)$ mit $\tau(\gamma) > \gamma$ und $\varrho(\gamma) > \gamma$, so daß $f(\xi) > f(\gamma)$, $f(\xi) > \gamma$ für $\xi \in M$ mit $\xi > \tau(\gamma)$ bzw. $f(\xi) < \varrho(\gamma)$ für $\xi \in M$ mit $\xi < \gamma$ gilt.

Mit Hilfe transfiniter Induktion bestimmen wir beginnend mit irgendeinem $\gamma_0 \in f^{n_0-1}(E_{n_0})$ eine mit $W(\omega_\alpha)$ zusammengehörige Fundamentalfolge $\gamma_\eta \in f^{n_0-1}(E_{n_0})$ wie folgt. Nehmen wir an, daß wir alle γ_η mit $\eta < \nu$ gefunden haben, so daß

$$\min\{\gamma_\eta, f(\gamma_\eta), \delta(\gamma_\eta), \delta(f(\gamma_\eta))> \pi_\gamma =$$

$$= \sup\{\{\gamma_\xi\}_{\xi<\eta} \cup \{f(\gamma_\xi)\}_{\xi<\eta} \cup \{\delta(\gamma_\xi)\}_{\xi<\eta} \cup \{\delta(f(\gamma_\xi))\}_{\xi<\eta}\}$$

für alle $\eta<\nu$ gilt. Wenn die Mengen $\{\gamma_\eta\}_{\eta<\nu}$, $\{f(\gamma_\eta)\}_{\eta<\nu}$, $\{\delta(\gamma_\eta)\}_{\eta<\nu}$ und $\{\delta(f(\gamma_\eta))\}_{\eta<\nu}$ nicht zu $W(\omega_\alpha)$ zusammengehörig sind, so sei μ_ν die kleinste Zahl $\in S$ mit $\pi_\eta<\mu_\nu$. Sei ferner

$$\max\{z_{\mu_\nu}, v_{\mu_\nu}\} = \mu'_\nu \quad \text{und} \quad \tau(y_{\mu'_\nu}) = \mu''_\nu.$$

Wir definieren γ_ν als die kleinste Zahl $\gamma\in f^{n_0-1}(E_{n_0})$, für die $\mu''_\nu<\gamma$ gilt. Durch diesen Prozeß ergibt sich eine Fundamentalfolge $H=\{\gamma_\eta\}_{\eta<\sigma}\subseteq f^{n_0-1}(E_{n_0})$, die mit $W(\omega_\alpha)$ zusammengehörig ist — σ ist eine Limeszahl — und für die

$$\min\{\gamma_\xi, f(\gamma_\xi), \delta(\gamma_\xi), \delta(f(\gamma_\xi))\} > \pi_\eta$$

für alle $\eta<\xi$ gilt.

Da $W(\omega_\alpha)-\delta(M)$ keine abgeschlossene und mit $W(\omega_\alpha)$ zusammengehörige Teilmenge enthält und $\delta(f^{n_0}(E_{n_0}))\subseteq W(\omega_\alpha)-\delta(M)$ gilt, so gibt es eine Limeszahl k und eine Teilfolge $\{\gamma_{\eta_\xi}\}_{\xi<k}$ von H, so daß

$$\lim_{\xi<k} \delta(f(\gamma_{\eta_\xi})) = \gamma^* \in \delta(M).$$

Aus $\gamma^*\in\delta(M)$ folgt, daß eine Zahl $\beta^*\in M$ existiert, für die $\delta(\beta^*)=\gamma^*$. Da $\delta(f(\beta^*))<\delta(\beta^*)$ gilt, so gibt es eine Zahl ξ_0, so daß

$$\delta(f(\beta^*))<\gamma_{\xi_0}.$$

Offenbar ist

$$\mu''_{\xi_0+2}<\delta(\beta^*)=\gamma^*.$$

Daraus folgt, daß $\mu_{\xi_0+2}<\beta^*$ gilt, d. h. $f(\beta^*)>y_{\mu'_{\xi_0+1}}$, d. h. $\delta(f(\beta^*))>\gamma_{\xi_0}$. Dies steht im Widerspruch zu $\delta(f(\beta^*))<\gamma_{\xi_0}$. Damit ist der Satz bewiesen.

B e w e i s d e s S a t z e s II. Seien $M_1=\{x\in M: \delta(f(x))<\delta(x)\}$ und $M_2=\{x\in M: \delta(f(x))\geqq\delta(x)\}$. Es ist offenbar, daß $\delta(M)=\delta(M_1)\cup\delta(M_2)$. Nehmen wir an, daß der Satz II falsch ist. Dann ergibt sich, da $\delta(M)$ stationär ist, daß $\delta(M_1)$ stationär ist. Da $\delta(x)$ fast-monoton ist, so ist M_1 mit $W(\omega_\alpha)$ zusammengehörig. Nach dem Satz III existiert eine mit $W(\omega_\alpha)$ zusammengehörige Teilmenge M'_1 von M_1, so daß $\delta(M'_1)$ eine stationäre Teilmenge von $W(\omega_\alpha)$ ist und $\delta(f(M'_1))<\delta(M'_1)$. Da $\delta(x)$ fast-monoton ist, so ist M'_1 eine mit $W(\omega_\alpha)$ zusammengehörige Teilmenge von M_1. Dies steht im Widerspruch zur Ungleichung $\delta(f(M'_1))<\delta(M'_1)$, weil $f(x)$ auch eine fast-monotone Funktion ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Wir beweisen nun, daß der Satz 2 für singuläre $\aleph_\alpha$ im allgemeinen nicht mehr gilt. Seien nämlich X, Y und Z drei abgeschlossene Teilmengen vom Typ $\omega_{cf(\alpha)}$ von $W(\omega_\alpha)$, so daß $X<Y<Z$ gilt und Z mit $W(\omega_\alpha)$ konfinal ist. Seien ferner $\{x_\xi\}_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}}$, $\{y_\xi\}_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}}$ und $\{z_\xi\}_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}}$, die zu X, Y und Z gehörige wachsende Funktionen und $Z'=\{z_{\omega\cdot\xi}\}_{\xi<\xi_{cf(\alpha)}}$, $Z''=\{z_{\omega.\xi+1}\}_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}}$, $Y'=\{y_{\omega.\xi}\}_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}}$, $X'=\{x_{\omega.\xi}\}_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}}$, $X''=\{x_{\omega.\xi+1}\}_{\xi<\omega_{cf(\alpha)}}$. Wir definieren zwei Funktionen $\delta(x)$ und $f(x)$ in $S=Z'\cup Z''\cup Y\cup X'\cup X''$ bzw. in $M=Z'\cup Y\cup X'$ wie folgt. Es sei $\delta(z_{\omega.\xi})=z_{\omega(\xi+1)}$, $\delta(z_{\omega\cdot\xi+1})=z_{\omega.\xi}$, $\delta(y_\xi)=z_{\omega.\xi}$, $\delta(x_{\omega.\xi})= =y_{\omega\cdot(\xi+1)}$, $\delta(x_{\omega.\xi+1})=y_{\omega.\xi}$, $f(z_{\omega.\xi})=z_{\omega.\xi+1}$, $f(y_\xi)=x_{\omega\cdot\xi+1}$ und $f(x_{\omega.\xi})=x_{\omega.\xi+1}$. Offenbar ist $\delta(M)=Z'\cup Y'$ eine stationäre Teilmenge von $W(\omega_\alpha)$ und $f(M)=Z''\cup X''$. Man kann leicht einsehen, daß die Funktionen die Bedingungen A, B, C, D und E erfüllen.

Literatur

[1] G. Fodor, Über transfinite Funktionen. I, *Acta Sci. Math.*, **21** (1960), 343—345.
[2] G. Fodor, Über transfinite Funktionen. II, *Acta Sci. Math.*, **22** (1961), 289 - 295.

(Eingegangen am 19. September 1960)